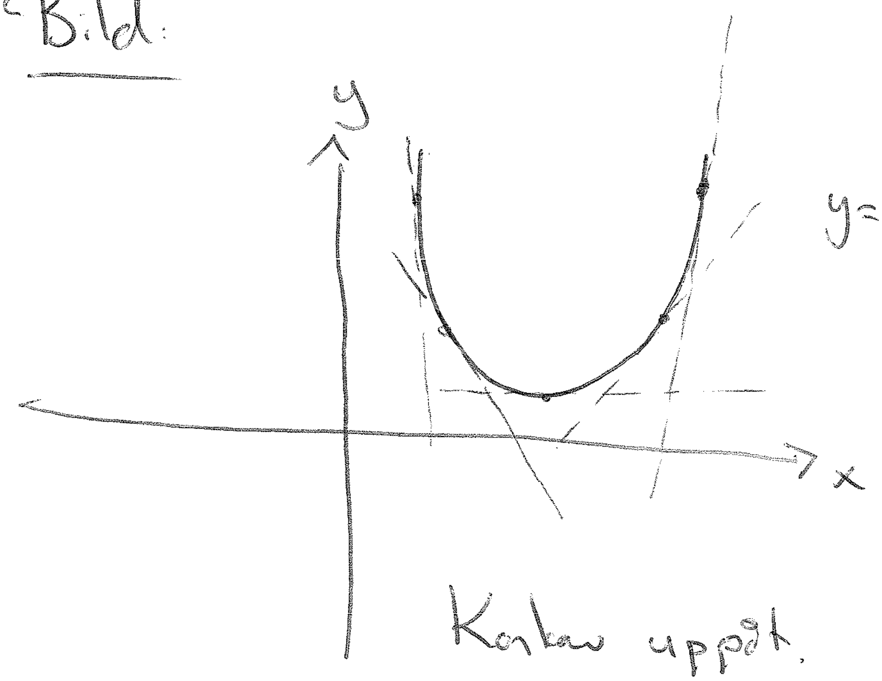
Föreläsning 11

Def:

Låt $f : I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall I. Låt $J \subset I$ vara ett öppet intervall. Vi säger att f är konkav upp på J om f är deriverbar på J och f' växer på J. Vidare, så säger vi att f är konkav nedåt ~~om~~ på J om f är deriverbar på J och f' avtar på J.

Bild:



Konkav uppåt.

Observera att grafen hela tiden ligger "ovanför" sina tangenter.

Konkav nedåt.

Observera att grafen ligger "nedanför" sina tangenter.

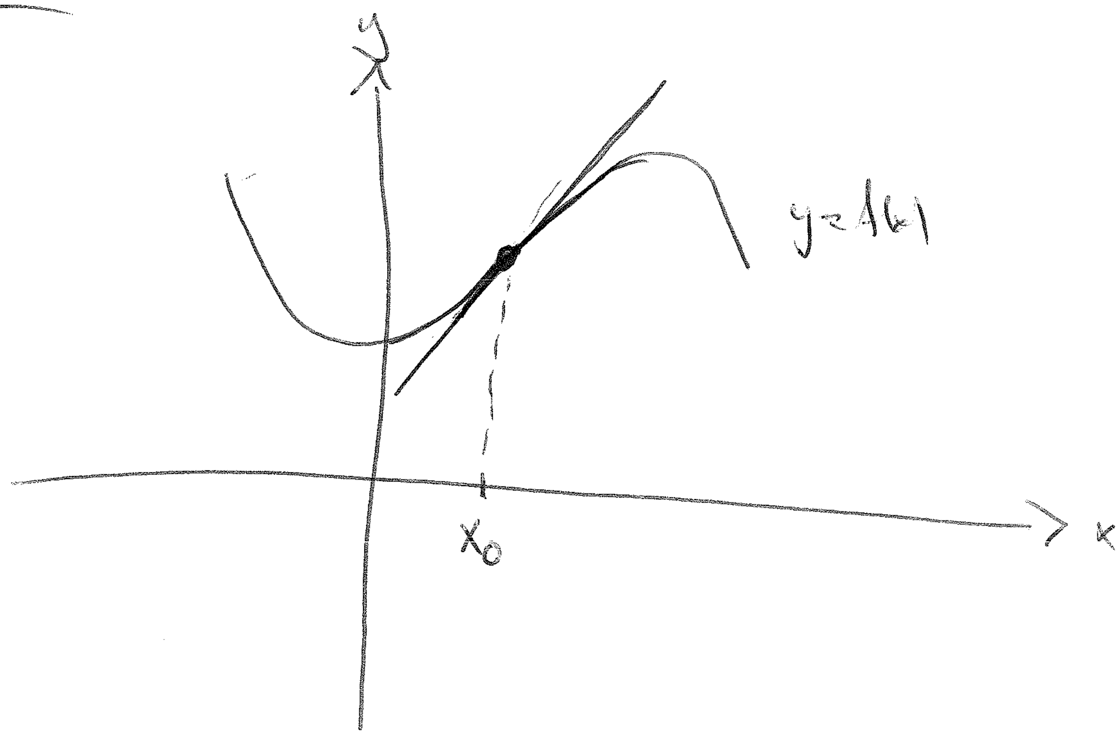
<u>Def</u>

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall I. Vi säger att $(x_0, f(x_0))$ är en inflektionspunkt till $y = f(x)$ om

1) $y = f(x)$ har en tangent i x_0.

2) f har olika konkaviteter på vardera sida om x_0.

Bild:



Här är x_0 en inflektionspunkt.
Till vänster om x_0 så är f konkav uppåt och till höger om x_0 så är f konkav nedåt. Observera att i x_0 så skär tangenten grafen.

Man kan använda sig av andraderivatan för att avgöra om f är konkav uppåt respektive nedåt. Även inflektionspunkterna kan man verifiera att man har hittat.

Sats:

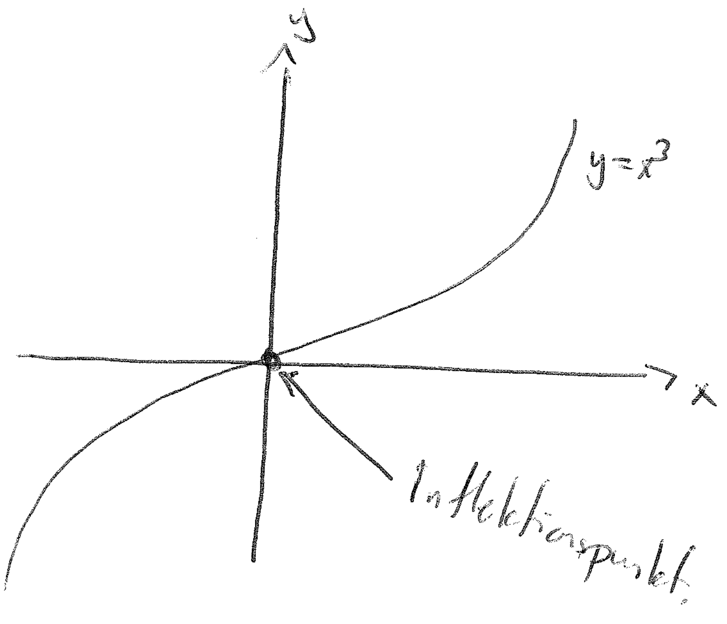
Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall I.

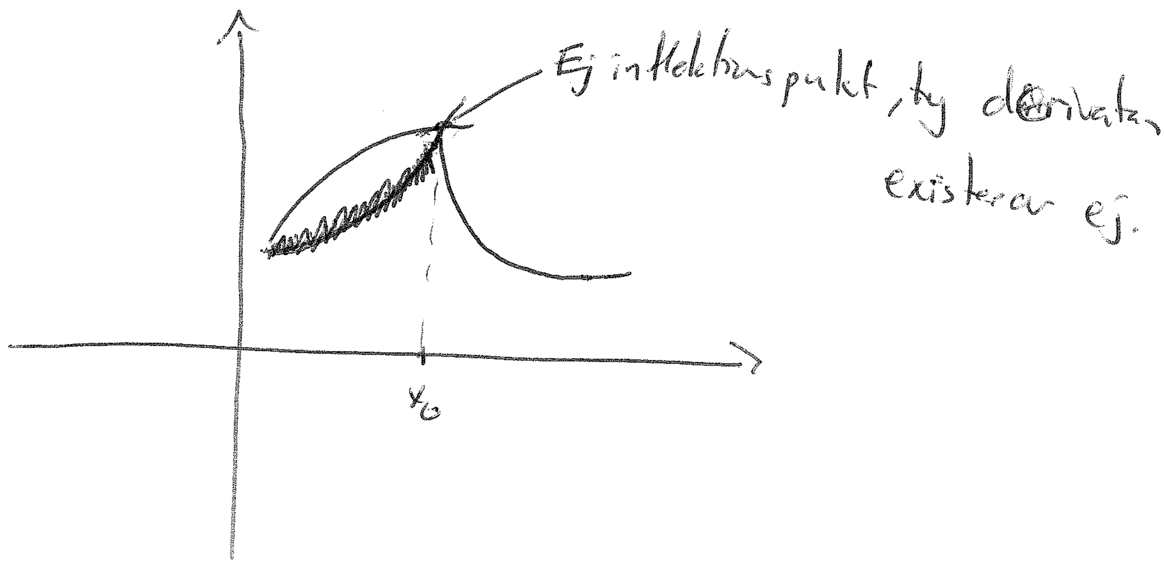
a) Om $f''(x) > 0$ på ett intervall $J \subset I$, så är f konkav uppåt på J.

b) Om $f''(x) < 0$ på ett intervall $J \subset I$, så är f konkav nedåt på J

c) Om f har en inflektionspunkt i x_0 och $f''(x_0)$ existerar, så är $f''(x_0) = 0$.

Observera att satsen säger <u>ingenting</u> om hur man hitta inflektionspunkter.





Ex:

Betrakta $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$. Vi ska hitta eventuella inflektionspunkter för f. Vi börjar med att derivera för att hitta konkaviteterna för f.

Derivering ger att

$$f'(x) = \frac{x^2+3 - x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2+3)^2 - 2(x^2+3) \cdot 2x \cdot (-x^2+3)}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+3) - 4x(-x^2+3)}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 6x + 4x^3 - 12x}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 - 18x}{(x^2+3)^3} = \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}$$

Observera att $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Notera även att $x^2+3 \neq 0$.

Vi har även att $f''(x) = 0$ då $x = 0$

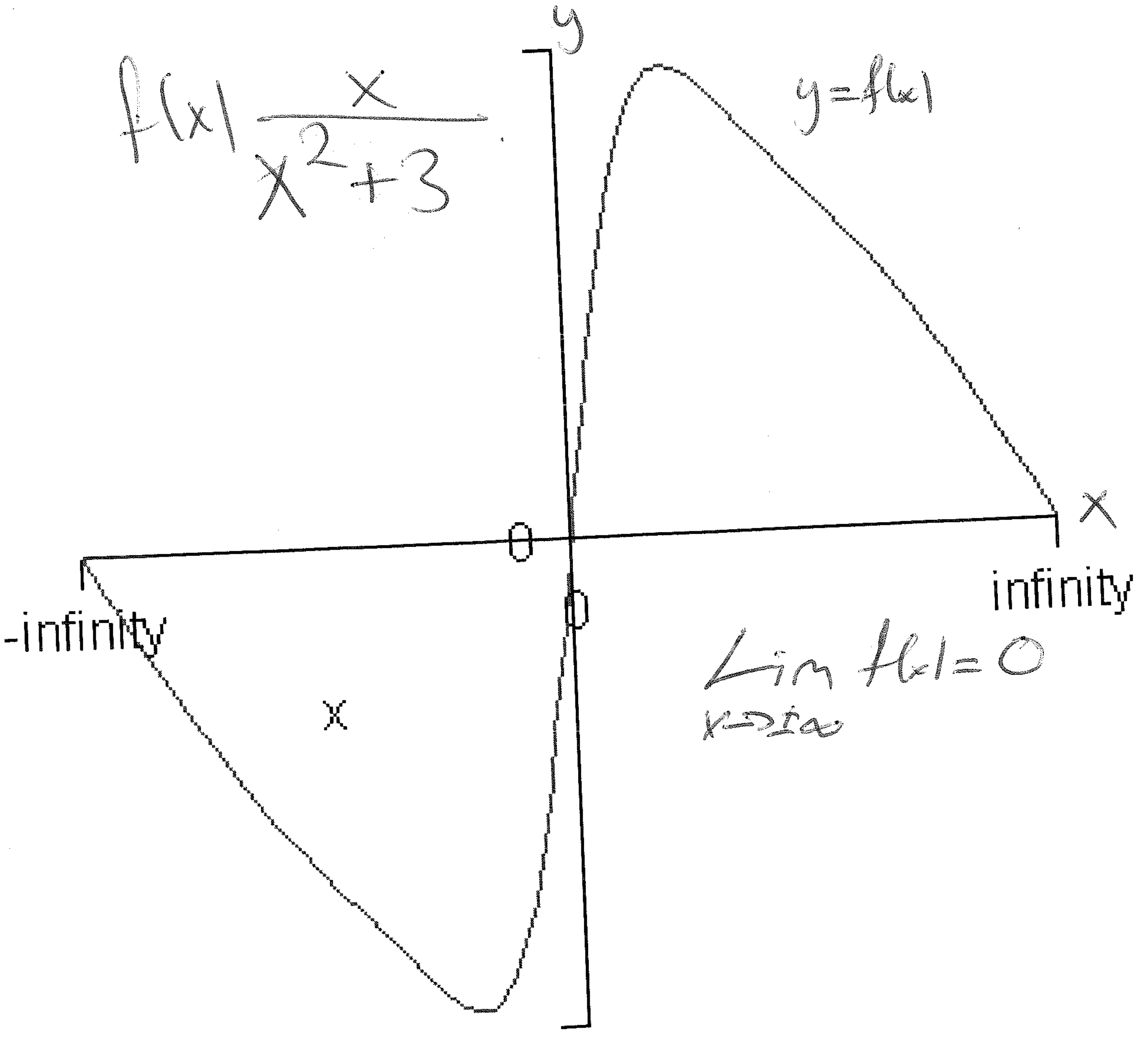
eller $x = \pm 3$.

Låt oss göra en teckentabell:

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Konkav nedåt, Inflektionspunkt, Konkav uppåt, Inflektionspunkt, Konkav nedåt, infl. punkt, Konkav uppåt

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Ex.

Betrakta $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$. Vi ska hitta inflektionspunkter, så vi deriverar

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot x - \ln x^2}{x^2} = \frac{2-\ln x^2}{x^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot x^2 - 2x(2-\ln x^2)}{x^4} =$$

$$= \frac{-2x - 4x + 2x\ln x^2}{x^4} =$$

$$= \frac{-6x + 2x\ln x^2}{x^4} = \frac{-6+2\ln x^2}{x^3}.$$

Vi har att $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2 = \ln x^2 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$

$x = -e$ fungerar också

Vidare så $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$.

och $\lim_{x\to 0} f''(x)$ odefinierad.

Vi har även att $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6 + 2\ln x^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{6}{4} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$

$x = -e^{3/2}$ fungerar också bra.

Observera att

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

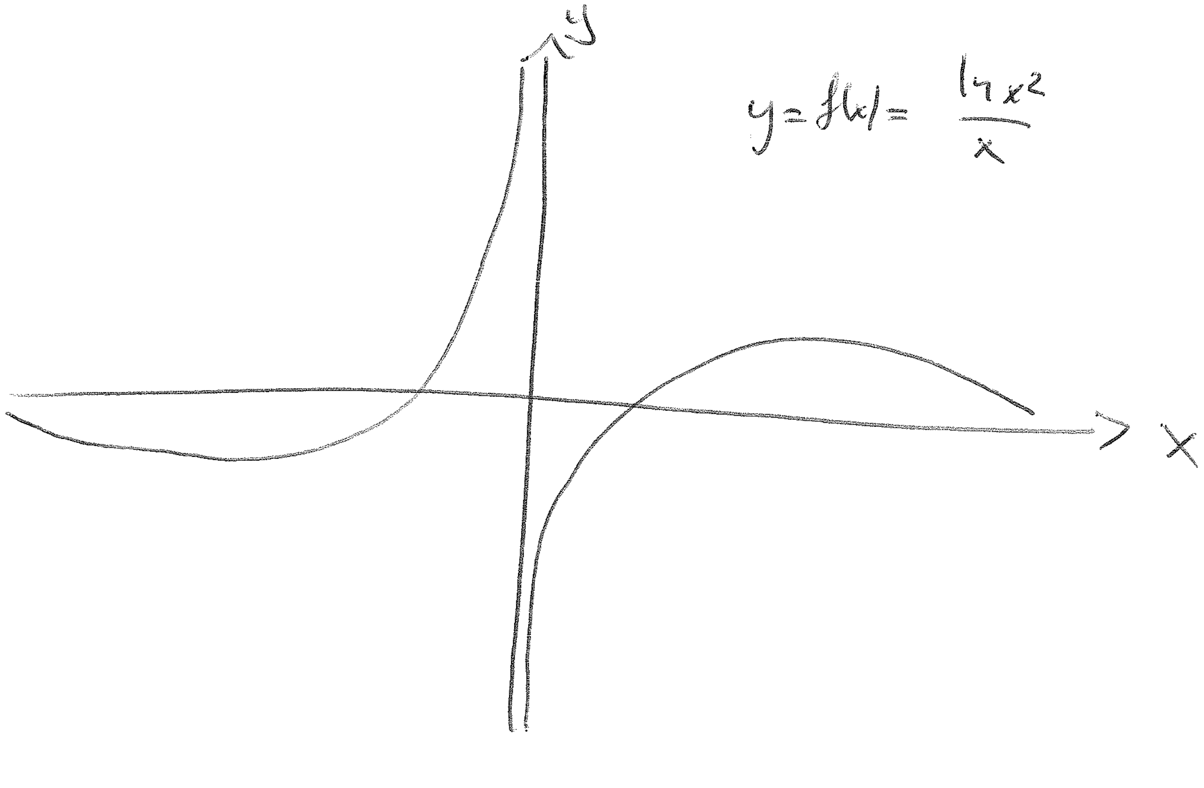
Vi gör ett teckenschema.

x		$-e^{3/2}$		$-e$		0		e		$e^{3/2}$	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	ej def.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	ej def	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

$x = \pm e^{3/2}$ inflektionspunkter.

Konkav uppåt på $(-e^{3/2}, 0)$ och $(e^{3/2}, \infty)$

Konkav nedåt på $(-\infty, -e^{3/2})$ och $(0, e^{3/2})$



Man kan även avgöra andra saker med andraderivatan:

Sats: (Andraderivatans test)

a) Om $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)<0$ då har f ett lokalt maximum i x_0.

b) Om $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)>0$ då har f ett lokalt minimum i x_0

c) Om $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)=0$ så kan man inte avgöra vad det är för punkt. Den kan ha ett lokalt maximum/minimum eller inflektionspunkt i x_0.

Ex:

Klassificera de kritiska punkterna för $f(x) = x + \frac{4}{x}$. Vi måste först hitta de kritiska punkterna så vi deriverar:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

Vi har att $f'(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$.

Vi vill nu använda andraderivatans test:

Derivering ger att

$$f''(x) = \frac{4}{x^4} \cdot 2x = \frac{8}{x^3}$$

För $x = 2 \Rightarrow f''(x) = 1 > 0$ Alltså är $x = 2$ en min-punkt

För $x = -2 \Rightarrow f''(x) = -1 < 0$, så $x = -2$ är en maxpunkt.

Ex:

Klassificera de kritiska punkterna för $f(x) = e^x \cdot x$.

Derivering ger:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

Eftersom $e^x \neq 0$ så är $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Den enda kritiska punkten är alltså $x = -1$.

Vi vill nu använda andraderivatans test. Derivering ger att

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$$

Så för $x = -1$ så gäller att $f''(-1) = \frac{1}{e^1} > 0$

Detta betyder att $x = -1$ är en minpunkt.

Ex:

Betrakta nu $f(x) = (x^2-4)^2$. Vi ska klassificera de kritiska punkterna. Derivering ger att

$$f'(x) = 2(x^2-4)\cdot 2x.$$

Alltså är $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x=\pm 2$.

Vi ska använda oss av andraderivatans test.

$$f''(x) = 2\cdot 2x \cdot 2x + 2(x^2-4)\cdot 2 =$$

$$= 8x^2 + 4x^2 - 16 = 12x^2 - 16.$$

Detta ger att

$f''(0) = -16 \Rightarrow$ Maxpunkt

$f''(2) = 48 - 16 = 32 \Rightarrow$ Minpunkt

$f''(-2) = 32 \Rightarrow$ Minpunkt.

Ex:

Låt
$$f(x) = [redacted] = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0. \end{cases}$$

Vad kan sägas om kritiska punkter och inflektionspunkter.

Vi börjar med att derivera:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases} = 2|x|.$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases} = 2\operatorname{sgn}(x).$$

Observera att $f''(0)$ existerar inte!, ty f' är inte deriverbar i 0.

Vi har att $f'(x) = 0 \iff x = 0$, så $x = 0$ är en kritisk punkt.

Origo är även en inflektionspunkt, ty definitionen är uppfylld.

Vi behöver alltså inte att f'' är deriverbar i en inflektionspunkt, och f'' behöver inte ens existera!